15.3.2015.

Problem 14: Galtonova kutija

Učenik: Tibor Basletić Požar (1c razred)

Mentorica: Katarina Škunca

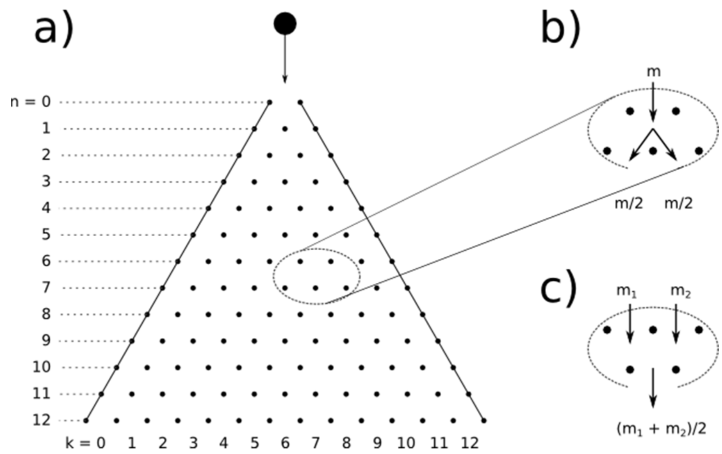
Tehnička škola Ruđer Bošković, Zagreb

ZADATAK

U Galtonovoj kutiji, dvodimenzionalni sustav pravilno raspoređenih prepreka raspršuje čestice. Kad padnu na dno posude, čestice su normalno distribuirane. Upotrebom različitih čestica i razmještaja prepreka nađite uvjete za koje distribucija više nije normalna.

UVOD

Cilj problema je naći (ne)ravnomjeran raspored čestica koju su prošle kroz prepreke. Teoretski je moguće izračunati vjerojatan redoslijed čestica, koji pokazuje da se broj čestica u jednom redu smanjuje sa udaljenošću određenog reda prepreka od sredine kutije. U mom radu, koristit ću Galtonovu kutiju konstruiranu pomoću čavlića u koje s gornje strane puštamo kuglice, koje onda prolaze kroz 12 redova čavlića (vidi sl. 1a).



Slika 1.

TEORIJSKO RAZMATRANJE

Kao što vidimo na slici 1b, kad kuglica prelazi iz jednog reda u sljedeći, ona s vjerojatnošću od 1/2 prođe sa lijeve, to jest desne strane prepreke. To nam omogućava da predvidimo vjerojatnost nalaženja kuglice u svakom redu n i svakom stupcu k. Npr. nakon prolaska kroz red n = 0 s vjerojatnošću 1 (svaka kuglica koju pustimo sigurno prođe između dva najgornja čavlića, vidi sl. 1a.), vjerojatnost prolaska kroz oba prolaza u redu n = 1 jednaka je 1/2. Nadalje, u redu n = 2 vjerojatnost prolaza kroz sasvim lijevi tj. desni stupac jednaka je 1/4. S obzirom na sliku 1c vjerojatnost prolaska kroz srednji stupac jednak je 1/4 + 1/4 = 1/2 = 2/4.

n = 0	1												
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Slika 2

Iz toga vidimo da će vjerojatnost prolaska P(n, k) kroz stupac k u redu n u nazivniku imati broj 2^n. S druge strane, brojnik te vjerojatnosti će zbog navedenog pravila (vidi sl. 1c) odgovarati brojevima iz Pascalovog trokuta (vidi sl. 2), koji ustvari odgovaraju tzv. binomnim koeficijentima:

$$P(n,k) = \frac{\text{brojnik}}{\text{nazivnik}} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \tag{A}$$

Time smo dobili raspodjelu vjerojatnosti ovisno o retku n i stupcu k u našoj Galtonovoj kutiji, pod pretpostavkom da je vjerojatnost odbijanja na određenoj prepreci jednaka 50% lijevo i 50% desno, tj. u simetričnom slučaju.

U općenitijem slučaju kada je vjerojatnost odbijanja na prepreci nije simetrična, može se pokazati da bi tražena vjerojatnost odgovarala tzv. binomnoj raspodijeli:

$$P(n,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gdje je p vjerojatnost odbijanja u lijevo, a (1 - p) u desno.

EKSPERIMENTALNI POSTAV

Za potrebe mog eksperimenta konstruirao sam Galtonovu kutiju pomoću malih čavlića zabijenih u stiropor. Razmak između čavlića sam odabrao s obzirom na kuglice koju sam koristio. Kako bi ih što preciznije rasporedio, najprije sam isprintao papir sa točkama na željenoj udaljenosti te onda u njih zabijao čavliće (vidi sl. 3, lijevo).

Slika 3

Od raznih mogućih kombinacija kuglica (staklene promjera 2mm, odnosno plastične promjera 6mm) i rasporeda čavlića (razmaka 3mm, odnosno 7mm i 8mm), najbolje su se pokazale plastične kuglice od 6mm i raspored čavlića razmaka 8mm. Staklene kuglice od 2mm su bile nespretne za rad, zbog malih dimenzija; raspored čavlića razmaka 7mm se pokazao preuskim za plastične kuglice nominalnog promjera 6mm zbog širine čavlića.

Kuglice koje sam puštali kroz Galtonovu kutiju u posebno dizajnirane pretince (vidi sl. 3, desno). Kako sam ukupno imao 4851 kuglica, svaka nominalno mase $m_k = 0.2$g, pretince koju su se popunili sam praznio u plastične čaše označene brojevima. S obzirom da su neke kuglice ispale van Galtonove kutije, pripremio sam posebnu čašu u koju sam i njih spremao. Također, vaganjem 14 praznih čaša odredio sam masu jedne čaše, $m_č = 25/14$ g.

Na kraju eksperimenta pomoću digitalne kuhinjske vage točnosti 1g, izvagao sam čaše s kuglicama. Za čaše koje odgovaraju pretincima k = 0, 1, 11 i 12, broj kuglica je bio toliko malen da je bilo točnije direktno izbrojati kuglice. Broj kuglica N(n, k) u ostalim pretincima dobivao sam tako da sam od ukupne izvagane mase m(n, k) oduzeo masu čaše te dobiveni broj podijelio s masom jedne kuglice:

$$N(n,k) = \frac{m(n,k) - m_č}{m_k}$$

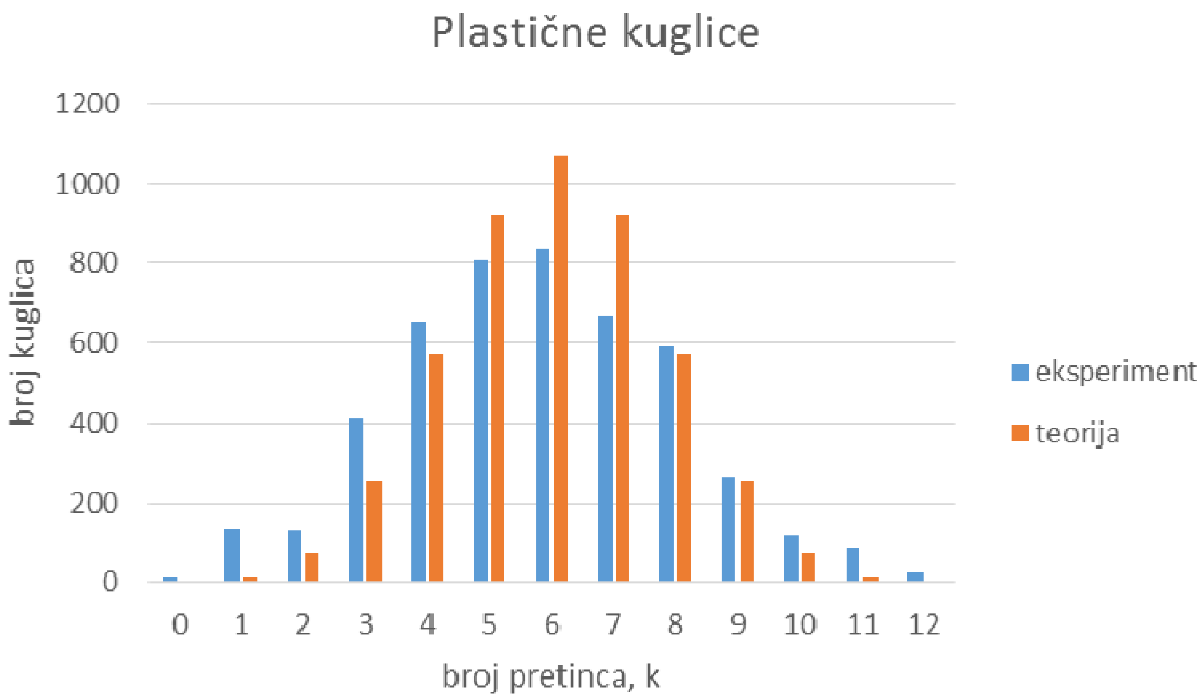
REZULTATI

U mom eksperimentu koristio sam Galtonovu kutiju s 13 redova (n = 12) i 13 pretinaca k = 0, 1, …, 12. U prvom dijelu koristio sam kuglice nominalnih dimenzija 6mm te dobio rezultate prikazane u tablici 1. U tablici se također nalazi stupac sa brojem kuglica predviđenim na temelju formule (A). Na slici 4 grafički je prikazan rezultat eksperimenta i teorijsko predviđanje.

Posuda	Masa s čašom (g)	Broj kuglica	Teorija
0	5	17	1,2
1	27	135	13,9
2	28	133	76,5
3	84	411	255,1
4	133	656	573,9
5	163	806	918,3
6	169	836	1071,3
7	135	666	918,3
8	121	596	573,9
9	55	266	255,1
10	24	117	76,5
11	18	86	13,9
12	6	24	1,2
	Ukupno:	4749	4749

Tablica 1.

U tablici 1. nisu prikazane kuglice koje su izašle izvan Galtonove kutije. Njih je bilo ukupno 102, što smatram puno manjim brojem od ukupnog broja kuglica te ih stoga zanemarujem.



Slika 4

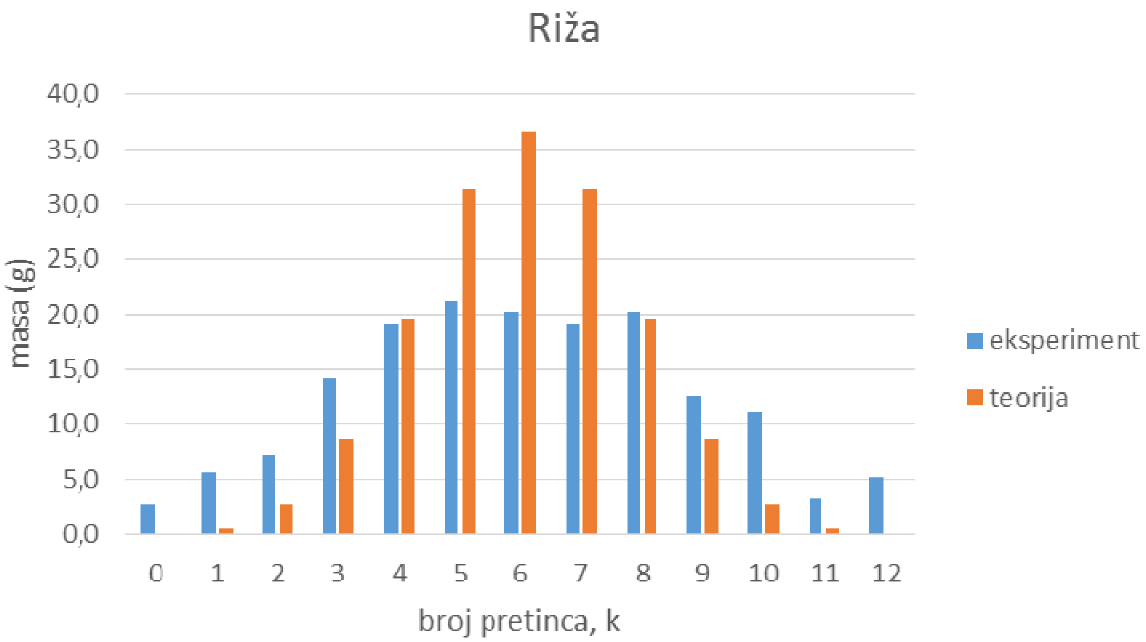
Primjećujemo da eksperimentalne vrijednosti ne odgovaraju u potpunosti teorijskim vrijednostima, ali možemo reći da su poprilično blizu.

Na istoj Galtonovoj kutiji napravio sam eksperiment s rižom, s oblikom zrna koji približno odgovara rotacionom elipsoidu kraće osi duljine od oko 2mm i dulje osi od 4mm do 10mm. Dobiveni rezultati prikazani su u tablici 2 i slici 5.

Posuda	Masa s čašom (g)	Masa (g)	Teorija (g)
0	4,5	2,7	0,0
1	7,5	5,7	0,5
2	9,0	7,2	2,6
3	16,0	14,2	8,7
4	21,0	19,2	19,6
5	23,0	21,2	31,4
6	22,0	20,2	36,6
7	21,0	19,2	31,4
8	22,0	20,2	19,6
9	14,5	12,7	8,7
10	13,0	11,2	2,6
11	5,0	3,2	0,5
12	7,0	5,2	0,0
	Ukupno:	162,3	162,3

Tablica 2

Dio zrna riže ispao je van Galtonove kutije; kao i prije tih 3.2g ćemo zanemariti s obzirom da čine samo manji dio ukupne mase.



Slika 5

U ovom slučaju slaganje sa teorijom je lošije nego u slučaju sa plastičnim kuglicama, što je posebno očito u srednjem području, k = 4 – 8, u kojem umjesto maksimuma imamo približno konstantnu masu riže. Pretpostavljam da je to posljedica nepravilnog izgleda riže te pogotovo činjenice da nisu sva zrna riže istog oblika (dimenzija).

ZAKLJUČAK

U ovom radu konstruirao sam Galtonovu kutiju sa 13 redova pomoću čavlića zabijenih u stiropor. Korištenjem plastičnih kuglica nominalnog promjera 6mm i riže duljine 4mm do 10mm te širine od otprilike 2mm dobili smo njihovu raspodjelu po pretincima k = 0, 1, …, 12. Dobivene rezultate sam usporedio sa teorijskim rezultatom (binomna raspodjela). U slučaju plastičnih kuglica (pravilno tijelo) eksperimentalni rezultati kvalitativno slijede teoriju. Opažene razlike su posljedica „statističke odstupanja" (konačan broj eksperimenata), a možda i nedovoljno precizne izrade Galtonove kutije (neravan stiropor, neuniformno raspored čavlića). U slučaju riže odstupanja su bitno veća, te je eksperimentalni rezultat kvalitativno drugačiji od teorijskog predviđanja. To pripisujemo nepravilnom obliku zrna riže i neuniformnošću zrna.

Smatram da bi se bolje slaganje sa plastičnim kuglicama dobilo sa Galtonovom kutijom kvalitetnije izrade te ponavljanjem eksperimenta više puta, dok bi za rižu valjalo razviti bolji teorijski model.

LITERATURA

http://en.wikipedia.org/wiki/Bean_machine

http://www.mathsisfun.com/data/binomial-distribution.html

http://world.mathigon.org/Sequences