

# IYNT

Državni turnir mladih prirodoslovaca

Problem: Planinski vrhovi

Luka Korov

Gimnazija Požega

Mentor: Magdalena Srdarević, prof.

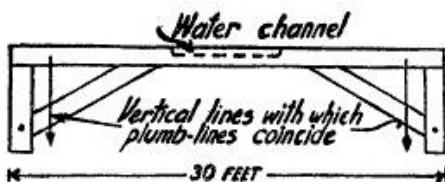
Požega, prosinac 2015.

## 1. Uvod - O mjerenuju visine

Tijekom povijesti istaknule su se tri metode mjerena visina planina u odnosu na najbliže ravnice ili morsku razinu: geodetska metoda, barometarska metoda i metoda vrelišta. Geodetska metoda je najstarija i ujedno najtočnija.

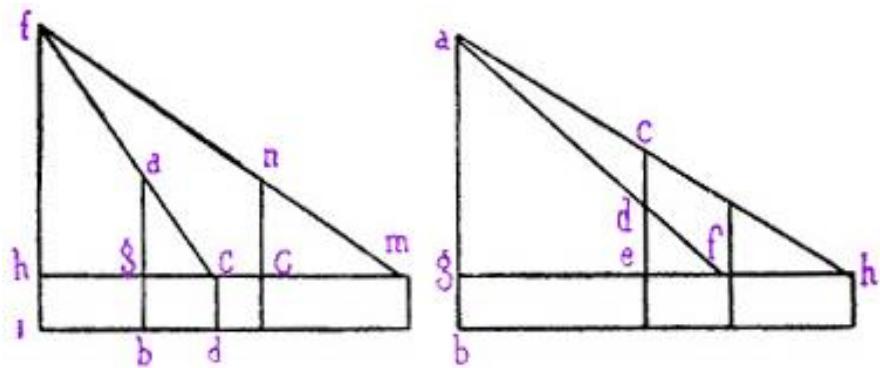
Geodetska metoda dijeli se na tri, više-manje, različita procesa: određivanje visine pomoću niveliranja, mjerenujem trokuta i određivanjem udaljenosti s koje je predmet vidljiv s mora.

Niveliranje je jedini postupak u mjerenuju visina koji je u davna vremena postigao preciznost koja je usporediva s preciznošću modernog niveliranja. Zanimljiv primjer je kanal u Korintu, projektiran oko 600. godine prije Krista, od kojeg se odustalo jer se došlo do zaključka da je more s jedne strane prevlake više, te da bi voda odnijela otok Aeginu.



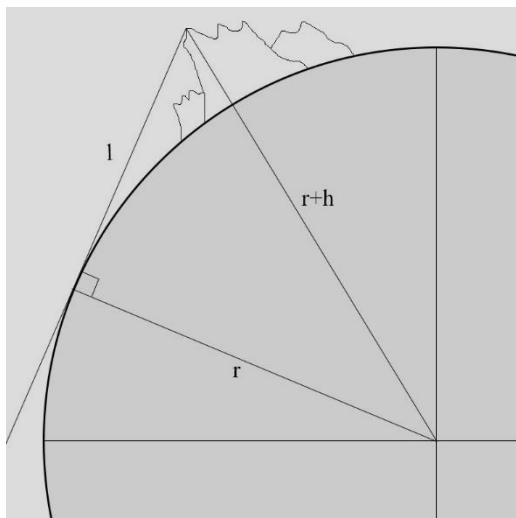
Slika 1. Instrument iz ranih faza niveliranja

Razvojem trigonometrije došlo je i do novih načina mjerena visine. Neki od njih u početku nisu bili baš točni, npr. izmjereno je da je vrh Teneriffe visok oko 90 000 m (86 289 m više od stvarne visine), no s vremenom su se greške svele na minimum, te je ta metoda danas jedna od najzahvalnijih.



Slika 2. Gerbertov crtež kojim objašnjava određivanje visine

Metoda izračunavanja visine planina pomoću udaljenosti s koje je vidljiva s mora teoretski je vrlo jednostavna, ali u praksi ju prate određene poteškoće koje mogu dovesti do velikih pogrešaka. To je određivanje visine po udaljenosti planina od mjesta s kojeg je vidljiva s mora ili po udaljenosti na moru na kojoj se brod može vidjeti s vrha planine. Ova metoda zahtjeva jednostavan izračun i poznavanje zakonitosti pravokutnog trokuta, kojemu su vrhovi: vrh planine, krajnja točka vidljivosti na moru i središte zemlje. Pri određivanju veličina u tom trokutu, najčešće korišteni podatci su polumjer Zemlje i udaljenost s koje se planina vidi.



Slika 3. Prikaz metode određivanja visine određivanjem udaljenosti s koje je vrh planine vidljiva s mora izrađen na temelju podataka pronađenih u literaturi

Barometarska metoda nije prezahtjevna, ali nije dovoljno pouzdana. Temelji se na promjeni tlaka s promjenom visine.

Metoda vrelišta također ima veze s tlakom, a zasniva se na različitoj temperaturi vrelišta vode u ovisnosti o tlaku pa tako i o nadmorskoj visini.

## 2. Problem – planinski vrhovi

Problem: *Koje metode se koriste za određivanje visina najviših planinskih vrhova? Predloži svoju vlastitu eksperimentalnu metodu i odredi visinu brda ili planine po svom izboru.*

Ideja je odabrani vrh izmjeriti geodetskom metodom, izračunati odstupanje od stvarnih (službenih) podataka, a onda ju usporediti s vlastitom eksperimentalnom metodom u kojoj se koristi pravokutni trokut i također izračunati odstupanje od službenih podataka.

Odabrani vrh za mjerjenje je brdo Sokolovac koje se nalazi na Požeškoj Gori koja okružuje Požegu zajedno s još četiri planine, Papuk, Krndija, Psunj i Dilj Gora. Na Sokolovcu se nalazi 12 m visok Domovinski križ koji se vidi s bilo kojeg mjestu u gradu Požegi. Službeni podatci govore da se brdo Sokolovac nalazi na 330,2 metra nadmorske visine.



Slika 4. Vrh Sokolovac (330,2 mm)

Moj cilj je izmjeriti visinu brda na dva načina. Korištenjem geodetskih uređaja za mjerjenje i vlastitom eksperimentalnom metodom koristeći pravokutni trokut i određene programe na računalu. Zatim usporediti rezultate dobivene pomoću obje metode i, konačno, izračunati odstupanje od službenih podataka.

### Metoda 1: mjerjenje geodetskim uređajima

Instrumenti:



Slika 5. Cygnus 2LS mjerna stanica



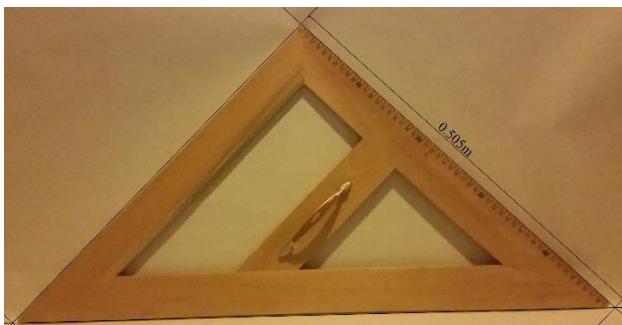
Slika 6. Prizma



Slika 7. GNSS uređaj

## Metoda 2: vlastita eksperimentalna metoda

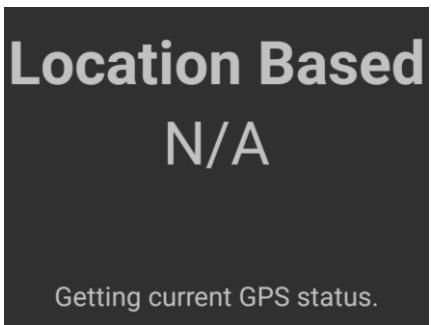
Instrumenti:



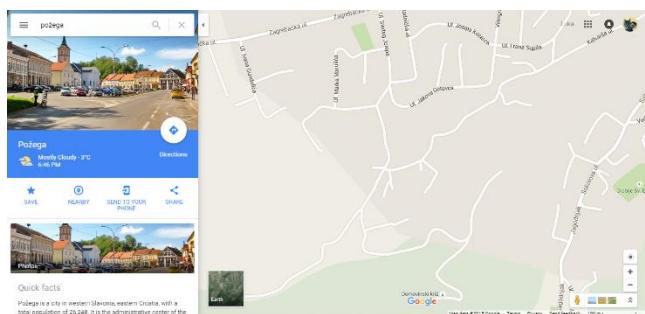
Slika 8. Jednakokračan pravokutan trokut  
( $0,505 \times 0,505 \times 0,714\text{m}$ )



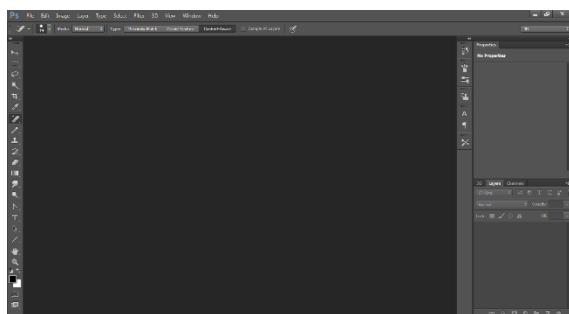
Slika 9. Libela



Slika 10. Aplikacija *Simple Altimeter*



Slika 11. Aplikacija *Google karte*



Slika 12. Program *Photoshop*

### 3. Tijek mjerena

#### Metoda 1: mjerene pomoću geodetskih uređaja:

- a) Dolazak na lokaciju
- b) Obilježavanje mjesta mjerena i postavljanje mjerne stanice i prizme da bi se izvršilo prvo mjereno (na manjoj udaljenosti) kako bi se konstruirao apsolutni koordinatni sustav kojem bi početna lokacija mjerne stanice bila ishodište
- c) Obilježavanje mjesta na vrhu brda, postavljanje prizme i mjerene zračne udaljenosti i kuta između mjerne stanice u podnožju i prizme na vrhu
- d) Premještanje prizme na još dvije lokacije u blizini podnožja i obavljanje mjerena između početne lokacije mjerne stanice i te dvije nove lokacije
- e) Zamjena mjesta prizme i mjerne stanice i ponovno mjerene
- f) Mjerene zračne udaljenosti i kuta između vrha brda i svake od nove dvije lokacije
- g) Mjerene točnih geografskih koordinata i nadmorske visine svake od točaka mjerena pomoću GNSS uređaja



Slika 13. Prikaz postupaka pod b)

Slika 14. Prikaz Postupaka pod f)



#### Metoda 2: mjerene vlastitom eksperimentalnom metodom:

- a) Dolazak na lokaciju
- b) Određivanje nadmorske visine lokacije aplikacijom *Simple Altimeter*
- c) Postavljane libele u vodoravan položaj i trokuta pod kutom tako da njegova hipotenuza bude usmjereni prema vrhu planine i fotografiranje
- d) Određivanje duljina stranica dobivenog pravokutnog trokuta i kutova između kateta i hipotenuze pomoću programa *Adobe Photoshop CC 2014*
- e) Određivanje točnih koordinata lokacije mjerena i lokacije vrha pomoću aplikacije *Google Karte* i računanje udaljenosti među njima na stranici *rechneronline.de*
- f) Ponavljanje postupaka za svako novo mjereno uz konstantan kut

# Location Based 199.978 m

GPS enabled.  
Currently getting 23 satellites.



Slika 15. Mjerenje I. postupak pod b)

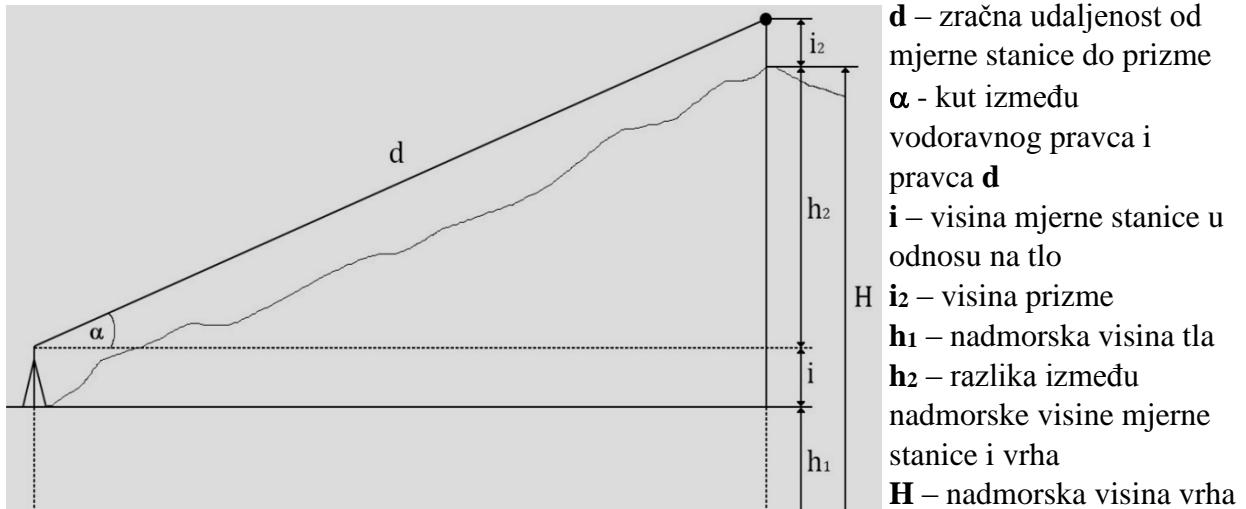
Slika 16. Mjerenje I. postupci pod c) i d)

Point 1:	<input type="text" value="45.326927, 17.663236"/>	<input type="button" value="d"/>	<input type="button" value="C"/>	Point 2:	<input type="text" value="45.323024, 17.665356"/>	<input type="button" value="d"/>	<input type="button" value="C"/>	<input type="button" value="Calculate"/>
Distance between the two points:			<input type="text" value="465"/>	meters =	<input type="text" value="0.465"/>	km		
North-south distance:			<input type="text" value="434"/>	meters =	<input type="text" value="0.434"/>	km		
East-west distance:			<input type="text" value="166"/>	meters =	<input type="text" value="0.166"/>	km		

Slika 17. Mjerenje I. postupak pod e)

## 4. Dobiveni rezultati

**Metoda 1:** mjerjenje pomoću geodetskih uređaja:



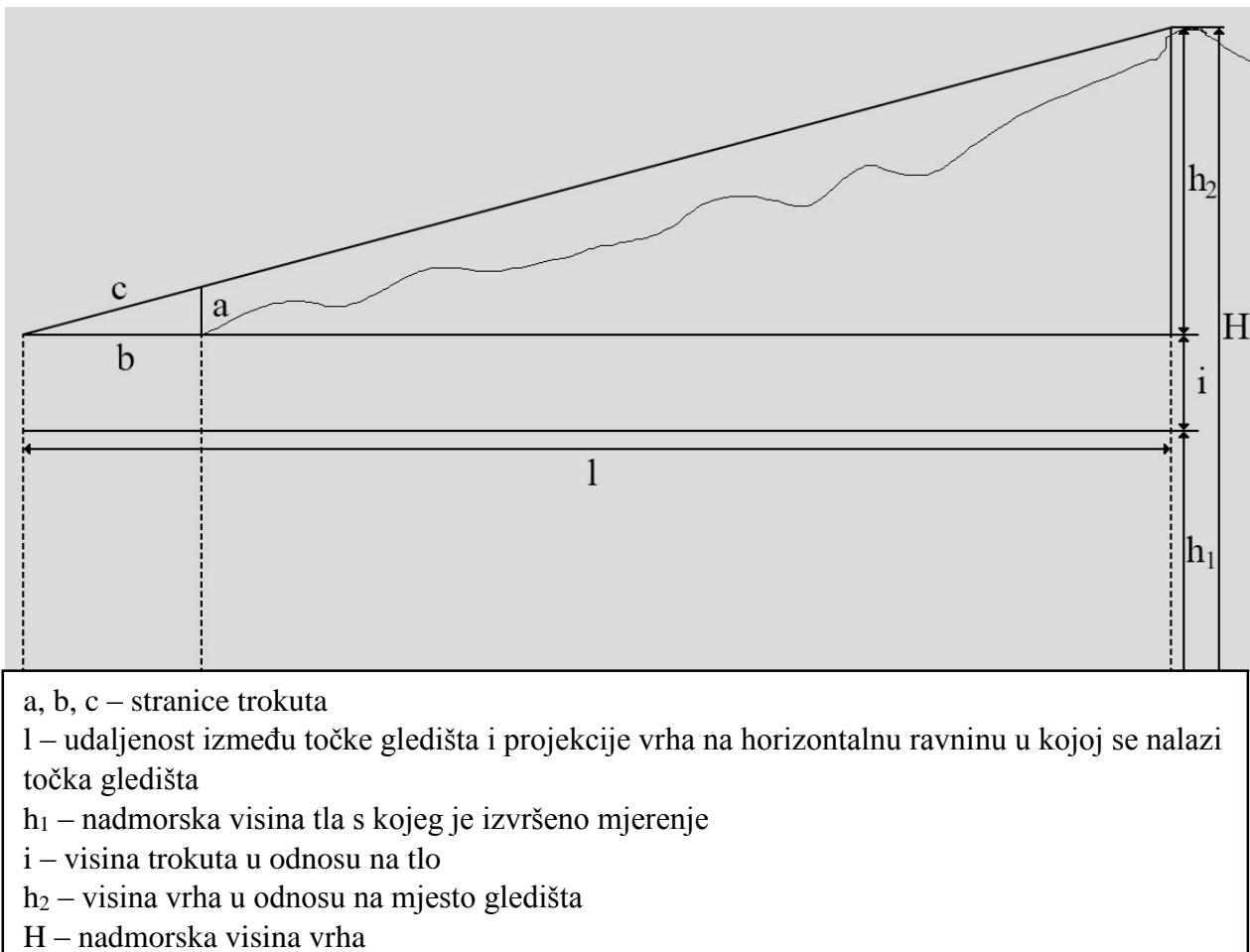
Slika 18. Skica trokuta iz geodetskog mjerjenja

$$h_2 = d \cdot \sin \alpha - i_2 \quad H = h_1 + h_2 + i$$

	Mjerenje I.	Mjerenje II.	Mjerenje III.	Mjerenje IV.
<b>i</b>	1,630 m	1,630 m	1,580 m	1,620 m
<b><math>i_2</math></b>	1,5 m	1,5 m	1,5 m	1,5 m
<b><math>\alpha</math></b>	11,544°	11,543°	11,441°	10,837°
<b>d</b>	880,74 m	880,75 m	895,48 m	952,34 m
<b><math>h_1</math></b>	152,52 m	152,52 m	151,16 m	149,7 m
<b><math>h_2</math></b>	174,76 m	174,74 m	176,13 m	177,56 m
<b>H</b>	328,91 m	328,89 m	328,87 m	328,88 m

Tablica 1. Rezultati geodetskog mjerjenja

## Metoda 2: mjerenje vlastitom eksperimentalnom metodom



Slika 19. Prikaz trokuta pomoću kojih su dobiveni rezultati

$$\frac{b}{l} = \frac{a}{h_2} \quad H = h_1 + i + h_2$$

	Mjerenje I.	Mjerenje II.	Mjerenje III.	Mjerenje IV.	Mjerenje V.
a	0,18 m	0,18 m	0,18 m	0,18 m	0,18 m
b	0,691 m	0,691 m	0,691 m	0,691 m	0,691 m
l	465 m	462 m	457,8 m	456 m	448 m
$h_1$	197,978 m	198,71 m	199,584 m	199,885 m	202,11 m
i	0,861 m	0,983 m	1,289 m	1,498 m	1,535 m
$h_2$	121,129 m	120,347 m	119,253 m	118,784 m	116,7 m
H	319,968 m	320,04 m	320,126 m	320,167 m	320,345 m

Tablica 2. Poznati podatci i dobiveni rezultati

## 5. Analiza rezultata

### Metoda 1: mjerenje pomoću geodetskih uređaja

Dobiveni rezultati uspoređeni su sa stvarnom nadmorskog visinom.

	Mjerenje I.	Mjerenje II.	Mjerenje III.	Mjerenje IV.
H	328,91 m	328,89 m	328,87 m	328,88 m
$\Delta H$	1,29 m	1,31 m	1,33 m	1,32 m

Tablica 3. Usporedba stvarne i dobivene visine

Pomoću podataka iz tablice možemo izračunati standardnu devijaciju:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (H - H_s)^2}{4}} = 1.313 m$$

Geodetskim mjerenjem izmjerio smo visinu brda s odstupanjem 1.313m od službenih podataka.

### Metoda 2: mjerenje pomoću vlastite eksperimentalne metode

Dobiveni rezultati uspoređeni su sa stvarnom nadmorskog visinom te kut između hipotenuze (**c**) i duže katete (**b** odnosno **I**) sa kutom koji bi trebao biti pri izračunavanju točne nadmorske visine. Na taj način dobivamo pogreške pri mjerenu.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{h_2}{l} \Rightarrow \alpha = 14.6^\circ$$

$$H_s = 330.2 m \quad (\text{službeni podatci})$$

$$\Delta H = |H - H_s| \quad h_{2s} = H_s - (h_1 + i)$$

$$\tan \alpha_s = \frac{h_{2s}}{l} \Rightarrow \alpha_s = 15.77^\circ$$

$$\Delta \alpha = |\alpha - \alpha_s| = 1.17^\circ$$

Greška kuta pri mjerenu (ciljanju) je  $1.17^\circ$ , što je prihvatljivo.

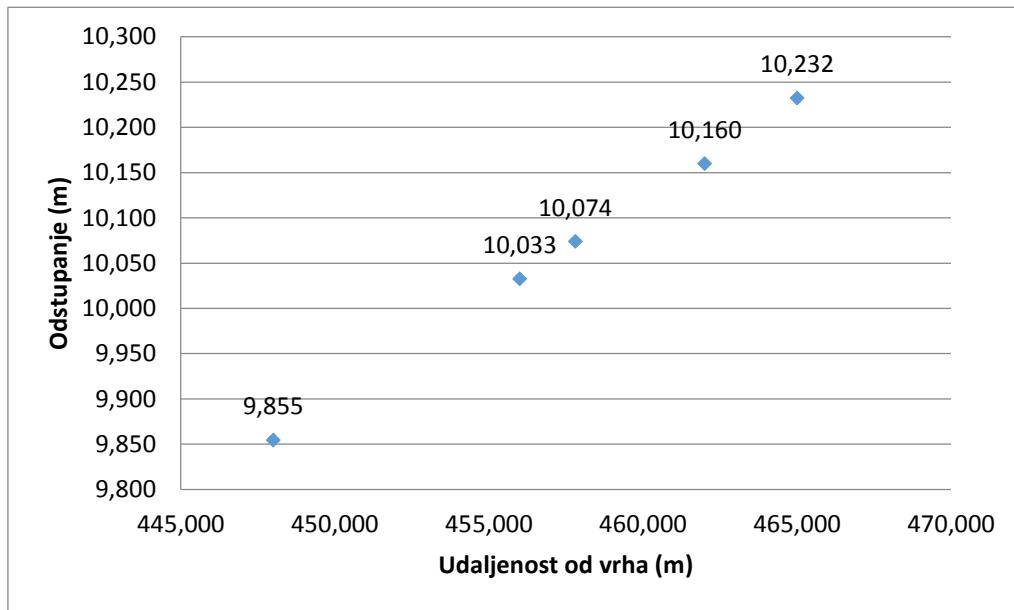
	Mjerenje I.	Mjerenje II.	Mjerenje III.	Mjerenje IV.	Mjerenje V.
$\Delta H$	10,232 m	10,16 m	10,074 m	10,033 m	9,855 m
$h_{2S}$	131,361 m	130,507 m	129,327 m	128,817 m	126,555 m
$l$	465 m	462 m	457,8 m	456 m	448 m
$a$	0,18 m	0,18 m	0,18 m	0,18 m	0,18 m
$b$	0,691 m	0,691 m	0,691 m	0,691 m	0,691 m
$\alpha$	14,6°	14,6°	14,6°	14,6°	14,6°
$\alpha s$	15,77°	15,77°	15,77°	15,77°	15,77°
$\Delta \alpha$	1,17°	1,17°	1,17°	1,17°	1,17°

Tablica 4. Razlike i odstupanja

Pomoću podataka iz tablice možemo izračunati standardnu devijaciju:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (H_i - H_s)^2}{5}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta H)^2}{5}} = 10.07m$$

Mojom eksperimentalnom metodom mogu izmjeriti visinu brda s pogreškom oko 10 metara, dok je pogreška u kutu zbog nepreciznosti ljudskog oka oko 1,17°.



Grafikon 1. Ovisnost odstupanja o udaljenosti od vrha

Možemo uočiti da se odstupanje povećava kako se udaljenost od brda povećava, odnosno što smo bliže brdu odstupanje je manje, dobivamo preciznije rezultate.

### **Usporedba metoda:**

S obzirom da su službeni podatci o visini vrha relativno stari, mislim da je geodetska metoda ipak preciznija, stoga sam usporedio vlastitu eksperimentalnu metodu s aritmetičkom sredinom iz geodetskih mjerena te dobio sljedeće rezultate:

geod. metoda	328,888 m				
vl. eksp. metoda	319,968 m	320,040 m	320,126 m	320,167 m	320,345 m
odstupanje	8,920 m	8,848 m	8,762 m	8,721 m	8,543 m

Iz podataka možemo izračunati standardnu devijaciju:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (H_{i(\text{eksperimentalna})} - H_{(\text{geodetska})})^2}{5}} = 8.759 \text{ m}$$

Odstupanje moje metode od geodetske je 8,759 m, a to je manje odstupanje i prihvatljivije od prethodnog kada sam računao odstupanje od službenih podataka.

## **6. Zaključak**

Cilj mog rada bio je izmjeriti vrh eksperimentalnom metodom koja se temeljila na usmjeravanju hipotenuze pravokutnog trokuta prema vrhu brda. Službeni podatci o nadmorskoj visini vrha datiraju iz 1999. godine, pa sam odlučio izmjeriti vrh najpreciznijom geodetskom metodom.

Dobivene rezultate eksperimentalnom metodom usporedio sam sa službenim rezultatima i dobio odstupanje oko 10 m. Kut pri mjerenu bio je fiksan, a mijenjao se položaj (udaljenost) u odnosu na vrh, ali sam morao uzeti u obzir i pogrešku ljudskog oka pri ciljanju vrha preko hipotenuze pravokutnog trokuta koja je iznosila  $1.17^\circ$ . Također se pokazalo da što sam bio bliže vrhu dobio sam manje odstupanje, a kako sam se udaljavao od vrha odstupanje se povećavalo, što je i logično jer se udaljavanjem od objekta njegova slika smanjuje te je teže naciljati točno određenu točku.

Odstupanje rezultata dobivenih geodetskim mjeranjem od službenih podataka je samo 1.31 m. Na kraju sam usporedio obje metode i dobio odstupanje 8.76 m.

Uzimajući u obzir faktor nepreciznosti ljudskog oka, ove pogreške u mjerenu, odnosno odstupanja, smatram prihvatljivima s obzirom na uvjete rada i opremu koju sam koristio.

## **7. Literatura**

1. <http://ss-glina.skole.hr/upload/ss-glina/newsattach/202/PRIKAZIVANJE%20RELJEFA%20-%20MJERENJE%20VISINA%20-%20CRTANJE%20PROFILA.pdf> (07.12.2015.)
2. [https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/003/588/original/Predavanja\\_iz\\_geodezije\\_2012-13\\_dio2.pdf?1402159118](https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/003/588/original/Predavanja_iz_geodezije_2012-13_dio2.pdf?1402159118) (07.12.2015.)
3. [https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/statpr/files/vjezbe9\\_zadaci1.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/statpr/files/vjezbe9_zadaci1.pdf) (07.12.2015.)
4. [http://free-vu.t-com.hr/Kresimir-Plese/mjerenje\\_i\\_procjenjivanje.htm](http://free-vu.t-com.hr/Kresimir-Plese/mjerenje_i_procjenjivanje.htm) (08.12.2015.)
5. [http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Journals/ISIS/12/3/Determinations\\_of\\_Heights\\_of\\_Mountains\\*.html](http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Journals/ISIS/12/3/Determinations_of_Heights_of_Mountains*.html) (10..12.2015.)