

IYNT
Turnir mladih prirodoslovaca

Problem: Galtonova kutija

Klara Stojčević
Gimnazija Požega

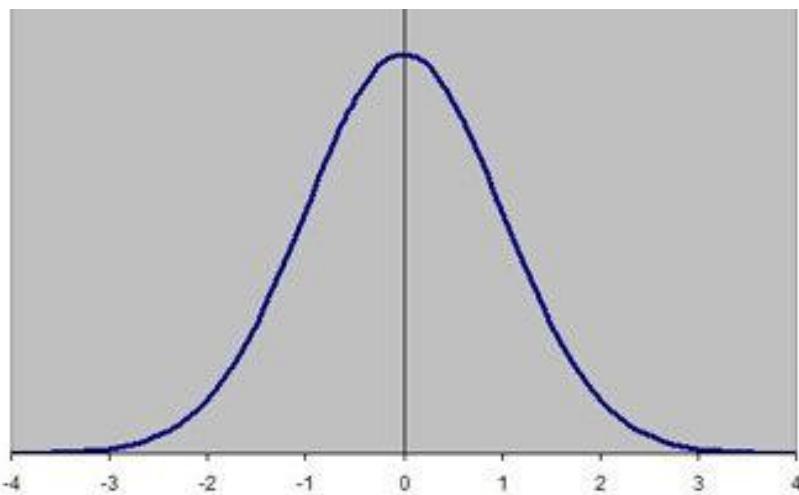
Mentor: Magdalena Srdarević, prof.

Požega, ožujak 2015.

O normalnoj distribuciji

Da bismo mogli razumjeti problem koji je postavljen pred nas, moramo razumjeti normalnu distribuciju i što Galtonova ploča, daska ili kutija predstavlja za tu distribuciju.

Naime, sve ili gotovo sve što mjerimo u prirodi raspoređuje se na isti način. Većina podataka bit će grupirana oko neke središnje vrijednosti, a samo je mala količina podataka ekstremna, odnosno na krajnjim rubovima. Ako prikupljene podatke prikažemo grafički dobivamo krivulju koju zovemo normalna ili Gaussova krivulja (slika 1).



Slika 1. Prikaz Gaussove krivulje

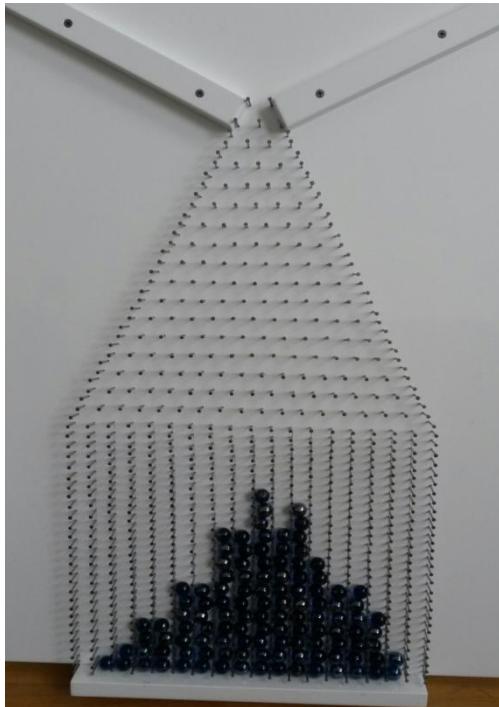
Galtonova ploča je mehanizam kojim se ilustrira normalna distribucija. To je dvodimenzionalni sustav prepreka (čavlića) koji su pravilno raspoređeni i imaju tendenciju raspršivanja čestica, odnosno raspršivanja rezultata. Čestice ulaze u mehanizam na sredini ploče jer to osigurava grupiranje čestica oko sredine, odnosno grupiranje rezultata mjerena oko neke središnje vrijednosti (slika 2).

Uzmemo li kuglicu, ubacimo ju u sredinu, ona na svom putu udara u prepreke koje joj se nalaze na putanji, odbija se od njih lijevo ili desno dok ne upadne u jednu od kategorija.

Kuglica ima u svakom redu šansu pola-pola hoće li otići lijevo ili desno pa je zapravo nepredvidljivo gdje će završiti pojedina kuglica i kako će izgledati njena putanja.

Ipak možemo zaključiti da je veća vjerojatnost da će kuglica završiti na sredini nego na rubovima jer ima više putova koji vode prema sredini, a samo ih je nekoliko koji vode do rubova. Ako ubacimo više kuglica, vidimo da postoji pravilo po kojem se one raspoređuju.

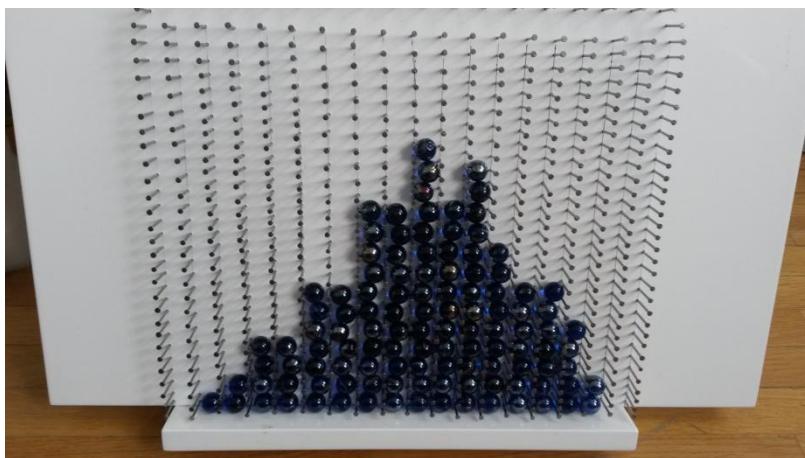
Najveći je broj kuglica na sredini, a kako idemo prema jednom ili drugom rubu broj kuglica se smanjuje.



Slika 2. Galtonova ploča

Krivulja koja je nastala zove se zvonasta ili Gaussova krivulja, a sama pojava normalna raspodjela ili normalna distribucija (slika 3). Puno stvari u prirodi, kao što su visina ljudi ili broj obuće, duljina lišća na stablu, rezultati testa, rast dionica na burzi itd. raspoređuje se po normalnoj razdiobi.

Dakle, ne možemo predvidjeti gdje će završiti jedna kuglica, ali možemo puno toga reći po kojem se pravilu kreće puno kuglica. Što više kuglica, to je izraženija normalna distribucija, odnosno, što je više mjerena, dobit ćemo preciznije rezultate. Većina ih se kreće oko srednje vrijednosti, a samo ih je nekoliko ekstremnih, na samom rubu.



Slika 3. Nastala Gaussova krivulja

Postavljanje i razrada problema

Problem: U Galtonovoj kutiji, dvodimenzionalni sustav pravilno raspoređenih prepreka raspršuje čestice. Kada padnu na dno posude, čestice su normalno distribuirane. Upotrebom različitih čestica i razmještaja prepreka treba naći uvjete za koje distribucija više nije normalna.

Razmišljajući o ovome problemu zaključila sam da postoji više parametara koji se mogu mijenjati kako bi se pronašla ovisnost određenog ponašanja s promjenom tih parametara. Glavni su parametri čestice s različitim svojstvima i prepreke s različitim razmještajima i oblicima. Prvo sam fiksirala čestice i mijenjala prepreke, a nakon toga fiksirala prepreke i mijenjala čestice.

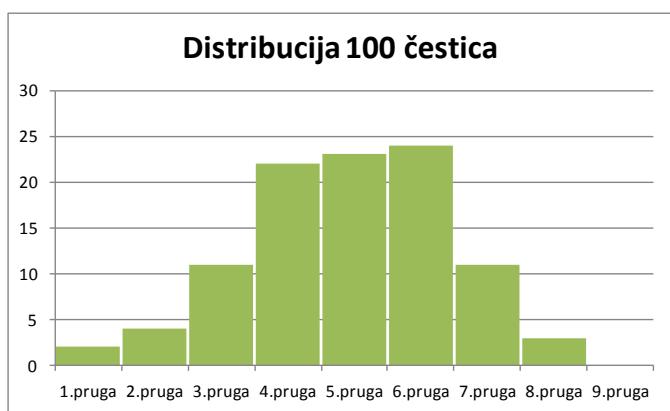
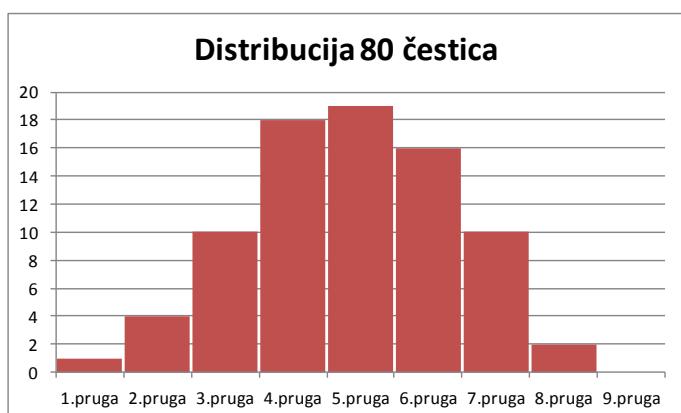
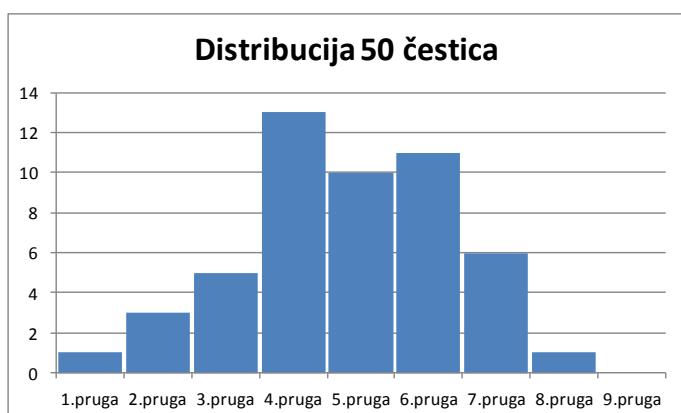
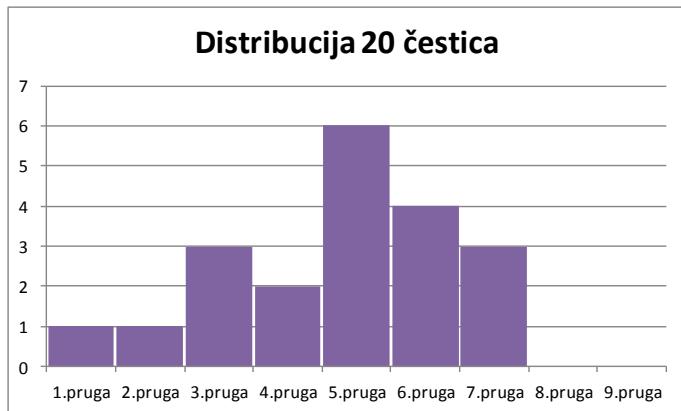
Ipak, prije svega, promatrala sam kut pod kojim je nagnuta Galtonova ploča u trenutku puštanja čestica. Zaključak je da kut nagiba cijele ploče nije povezan s izgledom Gaussove krivulje, odnosno, kut ne utječe na normalnu distribuciju. To je zbog toga što na malom međuprostoru čestice imaju vrlo мало mesta za promjenu putanje i vjerojatno traže isti put, bez obzira na kut nagiba cijele ploče. Jedina je razlika u tome što je protok čestica brži pod većim kutom nagiba ploče, dok za male kute nagiba može doći i do zadržavanja čestice na prepreci.

Pretražujući internet pronašla sam sljedeći link: http://phet.colorado.edu/sims/plinko-probability/plinko-probability_en.html. To je simulacija Galtonovog pokusa u kojem se može mijenjati broj redova prepreka, broj čestica ili vjerojatnost prolaska čestica. Napravila sam pokus sa 20, 50, 80 i 100 čestica, te brojala koliko je čestica ušlo u jednu od 9 pruga.

Dobila sam sljedeću tablicu:

	1.pruga	2.pruga	3.pruga	4.pruga	5.pruga	6.pruga	7.pruga	8.pruga	9.pruga	ukupno
broj čestica	1	1	3	2	6	4	3	0	0	20
broj čestica	1	3	5	13	10	11	6	1	0	50
broj čestica	1	4	10	18	19	16	10	2	0	80
broj čestica	2	4	11	22	23	24	11	3	0	100

Na temelju tablice napravila sam sljedeće grafikone:

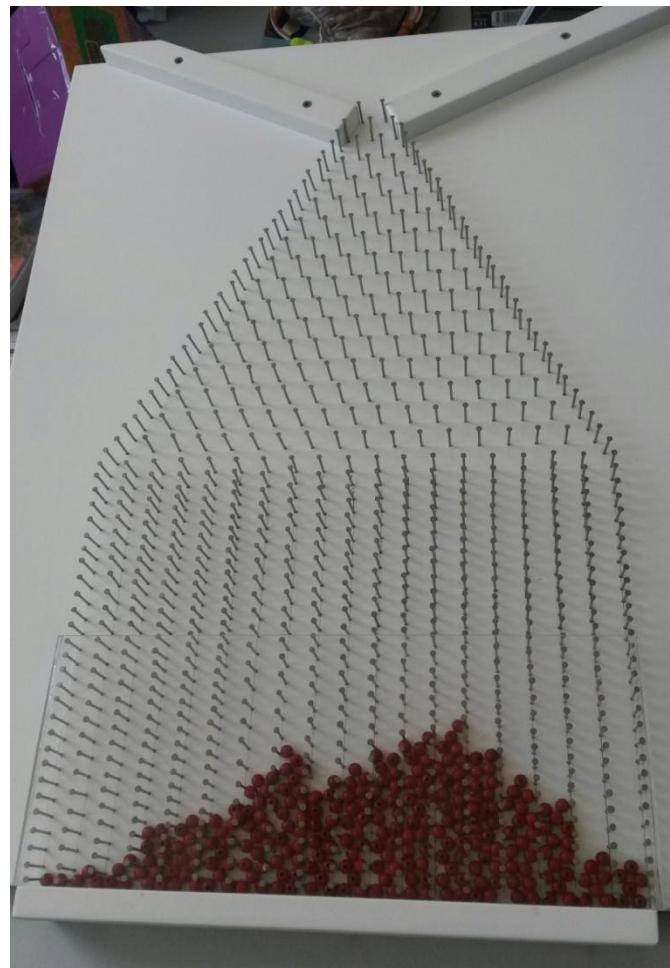


Iz ova četiri grafikona vidi se da s povećanjem broja čestica koje ulaze u pokus, normalna distribucija postaje sve izraženija. To je logično jer što više čestica koristimo dobit ćemo preciznije rezultate. Ako to povežemo s mjeranjem nekih podataka, naravno da ćemo dobiti preciznije rezultate ako imamo što više mjerena.

Zatim sam mijenjala broj redova prepreka (slika 4). Pokazalo se da je širina Gaussove krivulje u raspodjeli čestica na izlazu iz Galtonove ploče linearno ovisna o visini s koje se puštaju čestice. Kako se visina (broj redova prepreka) povećava, (slika 5) tako se i normalna distribucija povećava, a Gaussova krivulja postaje izraženija. To se događa zbog većeg broja sudara čestica s preprekama zbog veće visine, a to za posljedicu ima veću tendenciju širenja krivulje.



Slika 4. Smanjeni broj redova



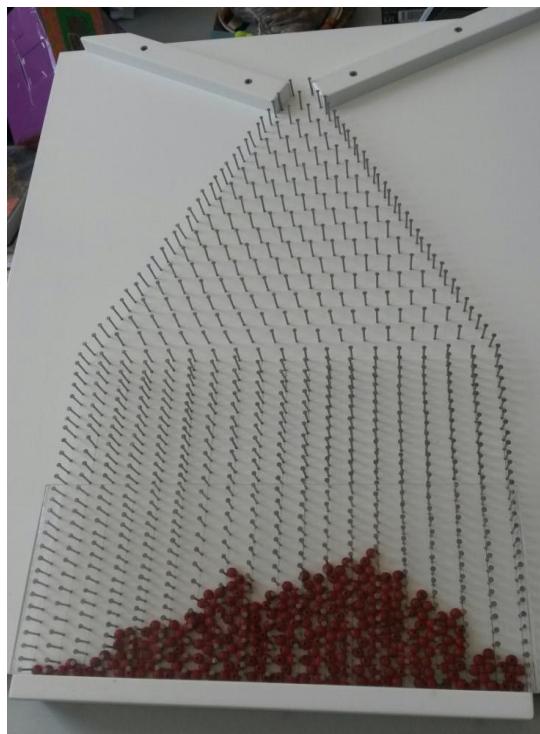
Slika 5. Povećani broj redova

Zanimljivo je promatrati omjer promjera čestica i duljine između prepreka. Neka je d duljina promjera čestice, a D duljina između dvije prepreke. Promatrani je omjer $\frac{d}{D}$.

Napravila sam više pokusa (snimka 3. i 4. pokusa nalazi se u prilogu) u kojima sam mjerila duljinu promjera čestice i duljinu između prepreka. Došla sam do sljedećih rezultata:

	1.pokus	2.pokus	3.pokus	4.pokus	5.pokus	6.pokus
d (cm)	0.6	0.6	0.6	1.4	1.4	1.4
D (cm)	2	3	5	2	3	5
$\frac{d}{D}$	0.3	0.2	0.12	0.7	0.47	0.28

Uspoređujući podatke u tablici s pokusima koji su napravljeni može se zaključiti da distribucija dobivena u 3. pokusu nije normalna, a omjer je najbliže nuli, dok se u 4. pokusu dobila Gaussova krivulja, a taj omjer je najbliže broju 1. Što je omjer $\frac{d}{D}$ veći, odnosno, što se više približava broju 1, to je normalna distribucija izraženija. Ako se D povećava, onda se omjer smanjuje i što se više približava nuli, to je normalna distribucija sve manje izražena. Prepreke više ne utječu na putanju čestica i one slobodno prolaze i ulaze u kategorije tako da se na kraju dobije gotovo jednaka količina čestica u svakoj prugi (slika 8).



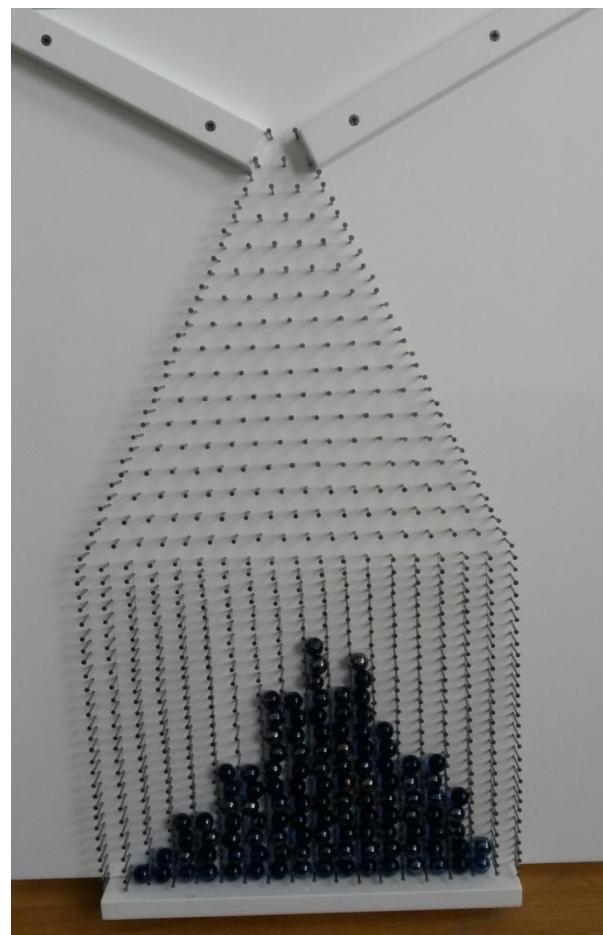
Slika 6. 1. pokus



Slika 7. 2. pokus



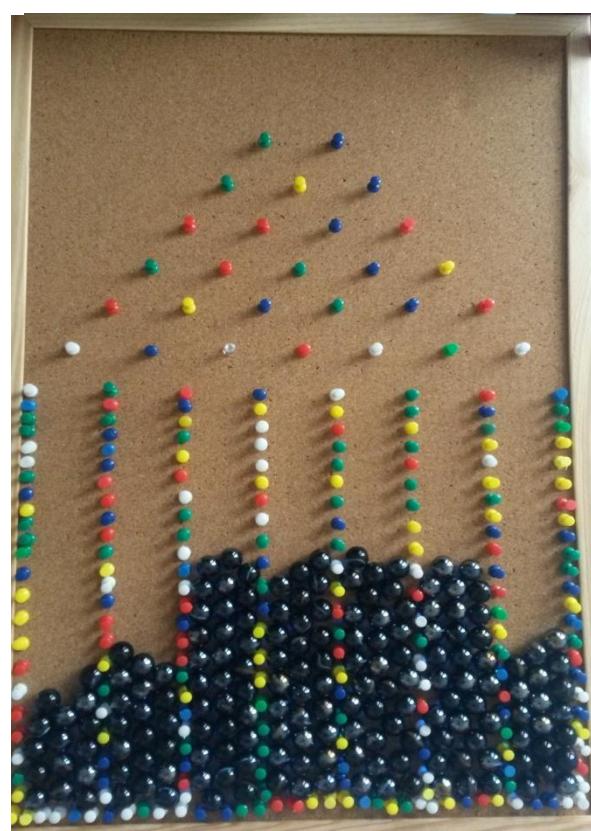
Slika 8. Duljina između prepreka se povećava (3. pokus)



Slika 9. Normalna distribucija (4. pokus)



Slika 10. 5. pokus



Slika 11. 6. pokus

Mijenjajući položaj prepreka, dobila se mogućnost puštanja čestica s drugog mesta, a ne iz sredine ploče. Prvo sam prepreke postavila u obliku trokuta s vrhom prema dolje. Ako sam puštala čestice iz sredine, dobila se normalna distribucija (slika 12), ali ako sam čestice pustila s jednog kraja ploče, distribucija više nije bila normalna, nego su se čestice grupirale na tu stranu ploče (slika 13). To se dogodilo jer se promijenila tendencija grupiranja čestica oko sredine što je i cilj normalne distribucije.



Slika 12. Čestice puštene iz sredine



Slika 13. Čestice puštene s jednog kraja

Također sam prepreke postavila u obliku trokuta, ali raznostraničnog, s vrhom pomaknutim u jednu stranu (slika 14). Na taj način se postiglo to da ponovno čestice ne puštam iz sredine pa one više nemaju tendenciju grupiranja oko središta. Nije se dobila normalna distribucija, nego pomaknuta u onu stranu s koje sam pustila čestice.

Ako su prepreke raspoređene tako da ne čine trokut, nego su naizmjenično postavljene u redove jednakе duljine, dobiju se isti zaključci koji su se dobili kad su prepreke bile postavljene u obliku trokuta s vrhom prema dolje. Distribucija nije normalna ako čestice puštamo s jednog od rubova ploče (slika 15).



Slika 14. Prepreke čine raznostranični



Slika 15. Prepreke u redovima jednake duljine

Sljedeće što sam promatrala nije bio položaj prepreka, nego njihov oblik. Prepreke ne moraju imati kružni poprečni presjek, nego mogu biti različitih oblika kao na primjer oblik trokuta. Promatrala sam jednakokračni pravokutni trokut. Ako se svaka trokutasta prepreka postavi s pravim kutom prema gore, dobije se normalna distribucija (slika 16). Trokuti su jednakokračni pa je vjerojatnost u svakom redu jednaka za prolazak čestice na lijevu ili desnu stranu.



Slika 16. Prepreke su pravokutni jednakokračni trokuti

Ako se trokuti okrenu tako da je donja stranica jedna od kateta, dobije se distribucija koja nije normalna. Dobiju se dvije različite distribucije koje ovise o tome na koju je stranu okrenuta hipotenuza. Ako je hipotenuza na lijevoj strani trokuta, cijela je distribucija pomaknuta na lijevu stranu (slika 17). Najviše je čestica u krajnjoj lijevoj pruzi, a kako idemo prema desnoj strani broj čestica se smanjuje. Ako je hipotenuza na desnoj strani trokuta, distribucija koju dobijemo simetrična je prethodnoj s obzirom na sredinu, odnosno s lijeva na desno, broj čestica se povećava (slika 18). To je zbog toga što nije jednaka vjerojatnost prolaska čestice pri sudaru s preprekom, jer prepreka nije simetrična. Ove prepreke usmjeravaju čestice na određenu stranu pa je veća vjerojatnost da će čestica pri sudaru s preprekom proći na stranu na kojoj je hipotenuza nego kateta.



Slika 17. Distribucija u lijevu stranu



Slika 18. Distribucija u desnu stranu

Osim promjena parametara prepreka, mogu mijenjati parametre čestica. To se prije svega odnosi na oblik i strukturu čestica. Upotrijebila sam još dva različita oblika čestica osim čestica u obliku kuglica, odnosno čestica s kružnim poprečnim presjekom. To su nepravilne čestice poput kamenčića (slika 19) i čestice eliptičnog oblika (slika 20).

U oba slučaja nije izražena normalna distribucija jer na putanju takvih čestica ne utječe samo prepreke, nego i njihov nepravilan oblik koji ih usmjerava, ne samo prema dnu ploče, nego u svim ostalim smjerovima, pa vjerojatnost odbijanja od prepreku nije jednaka. Često dolazi do zaustavljanja čestice na prepreci, stoga kut nagiba cijele ploče mora biti veći. To je zbog toga što nepravilne čestice imaju puno veće trenje s podlogom. Povećanjem kuta nagiba ploče povećava se komponenta sile teže u smjeru kosine koja ubrzava tijelo, pa čestice mogu doći do dna ploče.



Slika 19. Nepravilne čestice - kamenčići



Slika 20. Čestice eliptičnog oblika

Što se tiče materijala od kojih su načinjene čestice, koristila sam staklo i drvo. Postavlja se pitanje što ako je čestica elastična, odnosno od gume. Zaključila sam da prilikom dolaska elastične čestice na prepreku dolazi do pretvorbe energije tako da se kinetička energija čestice pretvori u energiju deformacije i elastičnu energiju čestice. Puštanjem više čestica u isto vrijeme, povećava se entropija (stupanj nereda) cijelog sustava. Kao rezultat toga, čestica se može odbiti od prepreke na nepravilan način i očekivana normalna distribucija više nije pravilna.

Zaključak

Cilj ovog istraživanja bio je pronaći uvjete pod kojima distribucija čestica na Galtonovojoj ploči neće biti normalna. Napravila sam puno pokusa koji su me doveli do različitih rezultata. Ishodi nekih pokusa bili su očekivani, dok su neki dali drugačiji rezultat od očekivanja. Sigurno je da jasnije rezultate dobijemo ako više puta ponovimo isti pokus.

Povećanjem broja čestica koje ulaze u sustav, normalna distribucija postaje izraženija, kao i povećanjem broja redova prepreka. Kut nagiba ploče ne utječe na distribuciju čestica. Povećanjem duljine između prepreka, normalna distribucija je sve manje izražena. Mijenjajući položaj prepreka, dobila se mogućnost puštanja čestica s drugog mesta, a ne iz sredine ploče, a to je utjecalo na distribuciju jer se promijenila tendencija grupiranja rezultata oko središta. Na distribuciju utječe i (nesimetričan) oblik prepreka jer se na taj način mijenja vjerojatnost prolaska čestica. Naravno da sam morala uzeti u obzir i različite čestice prema obliku, veličini i materijalu od kojih su napravljene. Zaključila sam da normalna distribucija nije izražena kod nepravilnih čestica.

Svim ovim tvrdnjama prethodilo je promišljanje, istraživanje, pravljenje pokusa, analiza i zaključivanje. Stvorene su situacije u kojima čestice nisu mogle tako jednostavno pronaći svoj put i na taj način su dobivene opisane nepravilnosti. Želimo li izbjegći nepravilnosti, moramo postaviti određene uvjete pod kojima ćemo dobiti normalnu distribuciju i Gaussovku krivulju.

Literatura:

- Iva Golac-Jakopović, Luka Krnić, Zvonimir Šikić, Milana Vuković: Matematika 7, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole, PROFIL
- Milan Papić: Primijenjena statistika u MS Excelu, Zoro
- Boris Petz: Osnovne statističke metode za nematematičare, Slap
- http://phet.colorado.edu/sims/plinko-probability/plinko-probability_en.html (25.2.2015.)
- <http://www.math.uah.edu/stat/applets/GaltonBoardExperiment.html>
(25.2.2015.)
- <http://www.karlsims.com/marbles/> (17.2.2015.)
- <http://mail.aimsedu.org/resources/articles/files/TTATGalton.pdf> (18.2.2015.)